Théorème de Thalès

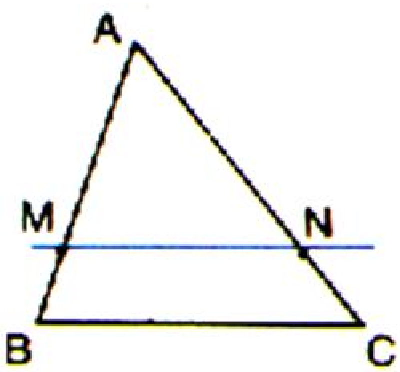
Webmestre@Seine-et-maths

2023-2024

En classe, nous avons évoqué le grand mathématicien Allemand Carl Friedrich Gauss (nous parlerons de Thalès de Milet en classe de 3ème, lorsque nous énoncerons son théorème dans toute sa généralité).

Théorème 1 (Théorème de Thalès dans un triangle) *Soit ABC un triangle, $M \in [AB]$ et $N \in [AC]$. Si $(MN)//(BC)$, alors les côtés des triangles AMN et ABC ont des longueurs proportionnelles, autrement dit :*

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}.$$



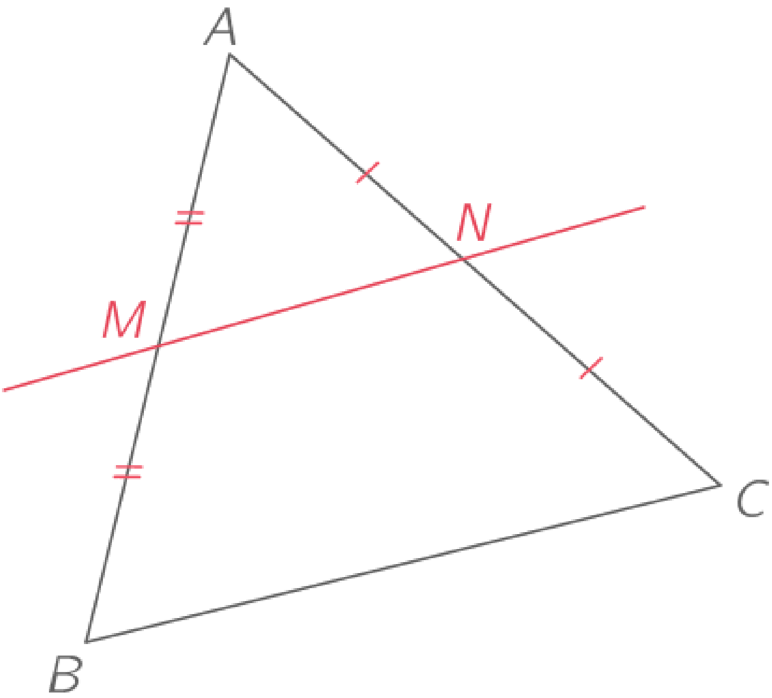
Définition 1 *Dans cette situation, les triangles AMN et ABC ont les mêmes mesures d'angles. On dit alors que ce sont des triangles semblables, et que $[AM]$ et $[AB]$ sont des côtés homologues (de même que $[AN]$ et $[AC]$, ainsi que $[MN]$ et $[BC]$).*
Le triangle AMN est une réduction du triangle ABC, et le triangle ABC est un agrandissement du triangle AMN.

Propriété 1 *Si deux angles d'un triangle sont égaux à deux angles d'un autre triangle, alors ces deux triangles sont semblables.*

En effet, la somme des angles d'un triangle vaut toujours 180°...

Exemples :

◇



Sur la figure ci-dessus, $(MN)//(BC)$ donc le triangle ABC est un agrandissement du triangle AMN. Le rapport de cet agrandissement est égal à 2 car $AB = 2 \times AM$.

De même, le triangle AMN est une réduction du triangle ABC, de rapport $\frac{1}{2}$ car $AM = \frac{1}{2} \times AB$.

◇ Soit ABC un triangle, $M \in [AB]$, $N \in [AC]$ et $(MN)//(BC)$. Supposons de plus que $AM = 8cm$, $AN = 3cm$ et $AC = 4,5cm$. Calculer AB.

Solution : on sait que $M \in [AB]$, $N \in [AC]$ et $(MN)//(BC)$.
On applique le théorème de Thalès :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}.$$

D'après l'égalité des produits en croix, on obtient :

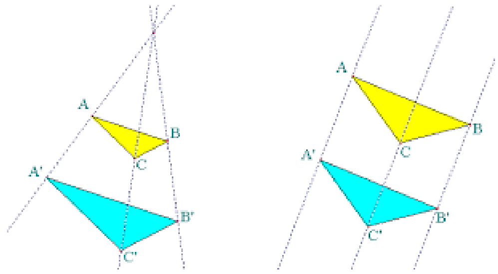
$$\underline{AB =} \frac{AM \times AC}{AN} = \frac{8 \times 4,5}{3} = \underline{12cm.}$$

Théorème 2 (Réciproque du théorème de Thalès dans un triangle) *Soit ABC un triangle, $M \in [AB]$ et $N \in [AC]$.*
Si $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$, alors les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

Remarque : dans l'énoncé de la réciproque ci-dessus, on peut remplacer $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$ par $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{MN}{BC}$ ou $\dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC}$ pour démontrer le parallélisme des deux droites.

Pour les chercheurs en herbe

Évoquons le **Théorème de Desargues**, du nom du mathématicien Lyonnais Girard Desargues alias "S.G.D.L." (1591-1661) :



Il affirme (entre autres) que sur chacun des tracés ci-dessus, si (AB) est parallèle à $(A'B')$ et (AC) est parallèle à $(A'C')$, alors (BC) est parallèle à $(B'C')$.