

# Théorème de Pythagore

Webmestre@Seine-et-maths

2024-2025

*En classe, nous avons évoqué le mathématicien Pythagore de Samos.*

## 1 Le théorème

**Rappel :** dans un triangle rectangle, le plus grand côté est celui qui est opposé à l'angle droit. C'est l'**hypoténuse** du triangle rectangle.

**Théorème 1 (de Pythagore)** ♡ *Si un triangle est rectangle, alors le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.*

**Exemples :**  $\diamond$   $GHI$  est un triangle rectangle en  $G$  tel que  $GH = 5\text{cm}$  et  $GI = 12\text{cm}$ . Calculer  $HI$ .

Solution :

On sait que  $GHI$  est un triangle rectangle en  $G$ .

Or d'après le théorème de Pythagore dans le triangle  $GHI$ ,

$$HI^2 = GH^2 + GI^2 = 5^2 + 12^2 = 5 \times 5 + 12 \times 12 = 25 + 144 = 169,$$

donc  $HI = \sqrt{169} = 13\text{cm}$ .

Donc  $HI = 13\text{cm}$  ;

$\diamond$   $JKL$  est un triangle rectangle en  $K$  tel que  $JK = 8\text{cm}$  et  $JL = 10\text{cm}$ . Calculer  $KL$ .

Solution :

On sait que  $JKL$  est un triangle rectangle en  $K$ .

Or d'après le théorème de Pythagore,

$$JL^2 = KL^2 + JK^2$$

$$KL^2 = JL^2 - JK^2 = 10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36,$$

donc  $KL = \sqrt{36} = 6\text{cm}$ .

Donc  $KL = 6\text{cm}$  ;

◇ Soit  $DEF$  un triangle tel que  $DE = 4\text{cm}$ ,  $DF = 5\text{cm}$  et  $EF = 6\text{cm}$ . Est-il rectangle ?

Solution :

D'une part,  $DE^2 + DF^2 = 4^2 + 5^2 = 16 + 25 = 41$ .

D'autre part,  $EF^2 = 6^2 = 36$ .

Ainsi,  $DE^2 + DF^2 \neq EF^2$ .

Donc d'après le théorème de Pythagore, le triangle  $DEF$  n'est pas rectangle.

Remarque : dans le troisième exemple ci-dessus, on utilise en réalité **la contraposée** du théorème de Pythagore.

## 2 La réciproque

**Théorème 2 (réciproque du théorème de Pythagore)** *Si dans un triangle, le carré de la longueur du plus grand côté est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, alors ce triangle est rectangle.*

**Exemple** : soit  $ABC$  un triangle tel que  $AB = 3\text{cm}$ ,  $AC = 4\text{cm}$  et  $BC = 5\text{cm}$ . Est-il rectangle ?

D'une part,  $AB^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$ .

D'autre part,  $BC^2 = 5^2 = 25$ .

Ainsi,  $AB^2 + AC^2 = BC^2$ .

Donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle  $ABC$  est rectangle en  $A$ .

## Pour les chercheurs en herbe

Un **triplet Pythagoricien** est un triplet  $(a, b, c)$  de nombres entiers positifs non nuls tels que  $a^2 + b^2 = c^2$ . L'humanité s'y intéresse depuis au moins 3800 ans ! Peux-tu te convaincre qu'il en existe une infinité ?

Le **dernier théorème de Fermat** montre que de tels triplets n'existent pas pour une puissance supérieure à deux, c'est-à-dire qu'il n'existe aucun triplet pour lequel  $a^3 + b^3 = c^3$ , ou encore  $a^4 + b^4 = c^4$ ...

*Retrouve cette leçon, des compléments et bien d'autres ressources sur : <http://seine-et-maths.wifeo.com>*