

Théorème de Thalès

Webmestre@Seine-et-maths

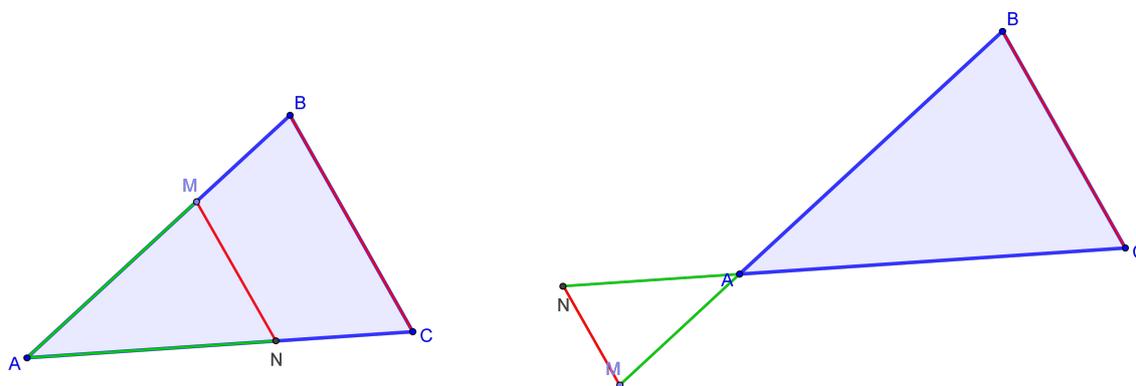
2023-2024

En classe, nous avons évoqué le célèbre mathématicien de l'Antiquité Thalès de Milet.

1 Le théorème

Théorème 1 (de Thalès) *Si deux droites (BM) et (CN) sont sécantes en A, et si les droites (BC) et (MN) sont parallèles, alors :*

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}.$$



Exemples d'utilisation :

1/ supposons que A, M et B soient alignés, ainsi que A, N et C. Supposons de plus que (BC) et (MN) sont parallèles, $AM = 4\text{cm}$, $AB = 5\text{cm}$ et $AC = 7,5\text{cm}$. Calculer AN.

On sait que : \diamond A, M et B sont alignés ;

\diamond A, N et C sont alignés ;

\diamond (BC) et (MN) sont parallèles.

Propriété : on applique le théorème de Thalès.

On obtient que :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}.$$

Astuce : on a écrit en vert les longueurs connues et en rouge la longueur recherchée.

Donc $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ (On n'utilise que les deux premiers rapports, n'ayant aucune longueur connue ou recherchée dans le troisième).

Par un produit en croix, on obtient que

$$AN = \frac{AM \times AC}{AB} = \frac{4 \times 7,5}{5} = \frac{30}{5} = 6.$$

Donc $AN = 6\text{cm}$.

2/ soient (RU) et (ST) deux droites sécantes en W , telles que les droites (RS) et (TU) sont parallèles. On sait de plus que $WS = 3\text{m}$, $WT = 4,5\text{m}$ et $RS = 5\text{m}$.

Calculer TU .

Réflexe important : pour visualiser la situation, mieux vaut faire un DML (Dessin à Main Levée) dans un premier temps !

On sait que : $\diamond (RU)$ et (ST) sont sécantes en W ;

$\diamond (RS)$ et (TU) sont parallèles.

Propriété : on applique le théorème de Thalès.

On obtient que :

$$\frac{WS}{WT} = \frac{WR}{WU} = \frac{RS}{TU}.$$

Donc $\frac{WS}{WT} = \frac{RS}{TU}$.

Par un produit en croix, on obtient que

$$TU = \frac{WT \times RS}{WS} = \frac{4,5 \times 5}{3} = \frac{22,5}{3} = 7,5.$$

Donc $TU = 7,5\text{m}$.

Une conséquence du théorème de Thalès (qui est en réalité son équivalent logique) permet de prouver que deux droites ne sont pas parallèles. En voici l'énoncé :

Propriété 1 (Contraposée du théorème de Thalès) Si deux droites (BM) et (CN) sont sécantes en A , et si $\frac{AM}{AB} \neq \frac{AN}{AC}$, alors les droites (BC) et (MN) ne sont pas parallèles.

2 La réciproque

Théorème 2 (Réciproque du théorème de Thalès :) *Si les points A, M et B sont alignés dans le même ordre que les points A, N et C , et si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$, alors les droites (BC) et (MN) sont parallèles.*

 *Lorsqu'on utilise la réciproque du théorème de Thalès, il est important de préciser que les points sont alignés **dans le même ordre**.*

Exemple d'utilisation : supposons que A, M et B sont alignés, et que A, N et C sont alignés dans le même ordre. Supposons que $AM = 4\text{cm}$, $AB = 6\text{cm}$, $AN = 8\text{cm}$ et $AC = 12\text{cm}$.

Démontrer que les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

Calcul préliminaire : $\frac{AM}{AB} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. $\frac{AN}{AC} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} = \frac{AM}{AB}$.

On sait que : $\diamond A, M$ et B sont alignés ;

$\diamond A, N$ et C sont alignés dans le même ordre ;

$\diamond \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$.

Propriété : on applique la réciproque du théorème de Thalès.

Donc les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

Pour les chercheurs en herbe

N'hésite pas à me demander un document passionnant qui explique en détails la démonstration du théorème de Thalès.