Fonctions affines

Webmestre@Seine-et-maths

2023-2024

*En classe, nous avons évoqué le mathématicien Autrichien Kurt Gödel (*1906 - 1978*).*

1 Définitions

Définition 1 *Soient a et b deux nombres. Une fonction affine f est une fonction qui à un nombre x associe le nombre $ax+b$.*

Cas particuliers :
*si $b=0$: $g : x \mapsto ax$ est une fonction linéaire ;
*si $a=0$: $h : x \mapsto b$ est une fonction constante.

Exemple : ⋄ la fonction $f : x \mapsto 3$ est une fonction affine avec $a=0$ (c'est donc également une fonction constante) et $b=3$;
⋄ la fonction $g : x \mapsto -0,5x$ est une fonction affine avec $a=-0,5$ et $b=0$ (c'est donc également une fonction linéaire) ;
⋄ la fonction $h : x \mapsto -0,5x+3$ est une fonction affine avec $a=-0,5$ et $b=3$.

Remarque : par une fonction affine non constante, un nombre a un unique antécédent.

2 Représentation graphique

On considère un repère du plan.

Définition 2 *La représentation graphique de la fonction affine $x \mapsto ax+b$ est l'ensemble des points de coordonnées $(x;y)$ tels que $y=ax+b$.*

Propriété 1 *⋄ La représentation graphique d'une fonction affine est une droite ;*
⋄ réciproquement, toute droite qui n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées est la représentation graphique d'une fonction affine.

Remarque : Cette droite est parallèle à la droite représentant la fonction linéaire $x \mapsto ax$.

Définition 3 *a est appelé le coefficient directeur de la droite. b est appelé l'ordonnée à l'origine de la droite. C'est l'ordonnée du point d'abscisse nulle (celui dont les coordonnées complètes sont donc $(0; b)$).*

Exemples : représentons les fonctions $f : x \mapsto 3$ par une droite (d_1), $g : x \mapsto -0,5x$ par une droite (d_2), et $h : x \mapsto -0,5x + 3$ par une droite (d_3).
Pour ce faire, c'est facile : il suffit de déterminer deux points appartenant à la droite, puis de la tracer :

Pour la fonction f, rien de plus simple puisqu'elle est constante. Pour toutes les valeurs de x, l'image sera égale à 3

x	0	1
$f(x)$	3	3

La représentation graphique de f est donc la droite (d_1) passant par les points $(0; 3)$ et $(1; 3)$.

De même pour la fonction g :

x	0	4
$g(x)$	0	-2

La représentation graphique de g est donc la droite (d_2) passant par les points $(0; 0)$ et $(4; -2)$.

Enfin, pour la fonction h :

x	0	2
$h(x)$	3	2

La représentation de h est donc la droite (d_3) passant par les points $(0; 3)$ et $(2; 2)$.

[Tracé sur Geogebra + visualisation de a et b]

3 Détermination de l'expression algébrique d'une fonction affine

Propriété 2 *Si la courbe représentative d'une fonction affine f passe par les points $(x_1; y_1)$ et $(x_2; y_2)$, alors son coefficient directeur se calcule par la formule*

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Exemple : soit g une fonction affine telle que $g(1) = 3$ et $g(3) = 7$. g est une fonction affine donc $g(x) = ax + b$.
D'une part, $a = \frac{g(3)-g(1)}{3-1}$ [petit dessin], donc $a = \frac{7-3}{3-1} = \frac{4}{2} = 2$. Donc g(x) = 2x + b.

D'autre part, comme $g(1) = 3$,
$3 = 2 \times 1 + b$, d'où $3 = 2 + b$, et enfin $b = 1$.
Finalement, $\boxed{g : x \mapsto 2x + 1.}$