Calcul littéral

Webmestre@Seine-et-maths

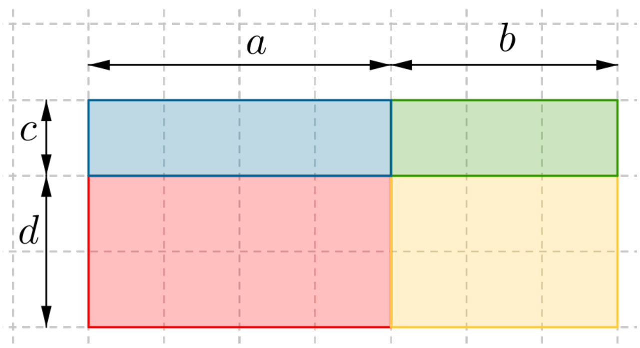
2023-2024

En classe, nous avons évoqué le mathématicien de l'Antiquité Diophante d'Alexandrie.

Tout au long de cette leçon, les lettres a, b, c, d, k, x et y désigneront des nombres relatifs.

1 Double distributivité et identités remarquables

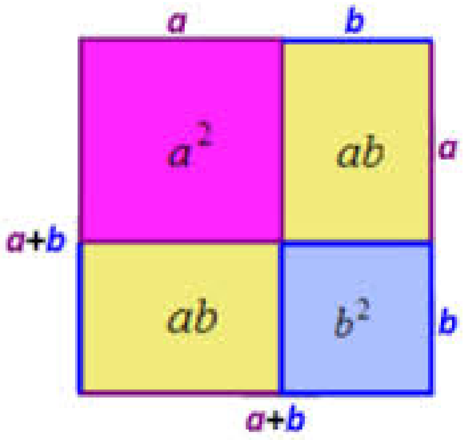
On se propose de calculer de deux façons différentes l'aire du grand rectangle ci-dessous, de longueur $a + b$ et de largeur $c + d$:



On obtient l'égalité suivante :

Propriété 1 (formule de double distributivité) ♡ $(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd.$

On se propose maintenant de calculer de deux façons différentes l'aire du grand carré ci-dessous, de côté $a + b$:



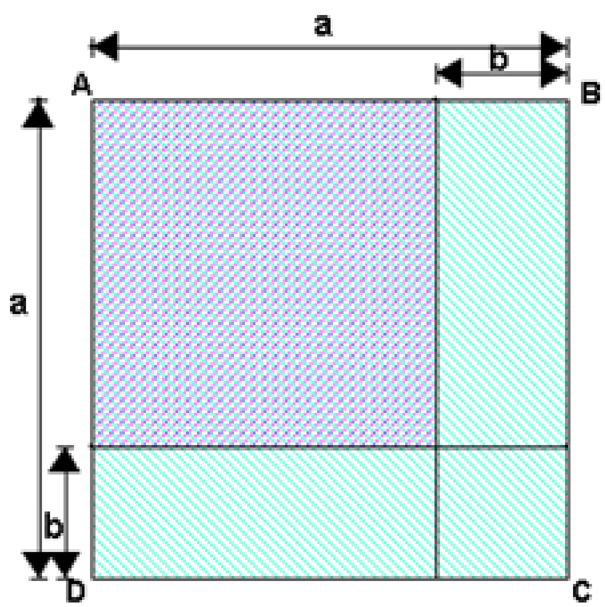
On obtient l'égalité suivante :

Propriété 2 (première identité remarquable) ♡ $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Remarque : cette égalité est appelée une identité remarquable.

Exemple : *$A = (x+6)^2$. On reconnaît $(a+b)^2$ avec $a = x$ et $b = 6$. Donc $A = x^2 + 2x \times 6 + 6^2$, et finalement $\boxed{A = x^2 + 12x + 36}$.

On peut réorganiser a et b dans la figure pour obtenir une variante de cette première formule :



[..] On obtient l'égalité suivante :

Propriété 3 (deuxième identité remarquable) ♡ $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Remarque : on peut aussi obtenir cette deuxième identité remarquable en remplaçant b par $-b$ dans la première.

Exemple : $B = (3x-5)^2$. On reconnaît $(a-b)^2$ avec $a = 3x$ et $b = 5$. Donc $B = (3x)^2 - 2 \times 3x \times 5 + 5^2$, et finalement $\boxed{B = 9x^2 - 30x + 25}$.

Voici une troisième identité remarquable souvent utile :

Propriété 4 (troisième identité remarquable) ♡ $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

Exercice : essaye de démontrer cette formule en utilisant la formule de double distributivité vue dans le cahier d'exercices.

Exemple : $C = (2x+3)(2x-3)$. On reconnaît $(a+b)(a-b)$ avec $a = 2x$ et $b = 3$. Donc $C = (2x)^2 - 3^2$, et finalement $\boxed{C = 4x^2 - 9}$.

2 Equations produits

Définition 1 *$a \neq 0$ et $c \neq 0$. Une équation produit est une équation du second degré de la forme : $(ax+b)(cx+d) = 0$.*

Exemples : *$(2x+6)(x+2) = 0$;
* $x^2 = 36$ (car c'est la même équation que $x^2 - 36 = 0$, ou encore $(x+6)(x-6) = 0$ après factorisation).

Propriété 5 **si l'un des facteurs d'un produit de nombres relatifs est nul alors ce produit est nul (autrement dit, si $a = 0$ ou $b = 0$ alors $a \times b = 0$) ;
réciproquement, si un produit de nombres relatifs est nul, alors au moins un des facteurs est nul (ou encore, si $a \times b = 0$ alors $a = 0$ ou $b = 0$).

Propriété 6 (Résolution des équations produits) *Résolvons l'équation produit $(2x+6)(x+2) = 0$.*

D'après la propriété 7, le produit de $(2x+6)(x+2)$ étant nul, au moins l'un des facteurs parmi $(2x+6)$ et $(x+2)$ est nul :
$2x + 6 = 0$ *ou* $x + 2 = 0$
donc $2x = -6$ *ou* $x = -2$,
d'où $x = -3$ *ou* $x = -2$

Finalement, $\boxed{\text{les solutions de l'équation sont } x = -3 \text{ et } x = -2.}$

3 Calcul littéral et démonstrations

Définition 2 *Dire que deux expressions littérales d'inconnue x sont égales, c'est affirmer qu'elles le sont pour toute valeur par laquelle on remplace la lettre x.*

Exemple : les expressions littérales $3x^2 + 9x$ et $3x(x + 3)$ sont égales.

Remarque : il suffit d'une seule valeur (de x) pour laquelle les deux expressions littérales diffèrent pour que l'égalité soit dite fausse.

Exemple : l'égalité $\frac{x}{x} = 1$ est fausse (pourquoi ?).

Soit dit en passant, on peut même prouver que $1 = 0$ *si on considère la précédente égalité comme étant vraie (cf paradoxe de De Morgan).*

Ainsi, les expressions littérales peuvent servir à démontrer une propriété.

Exemple : démontrons que la somme de trois nombres entiers consécutifs est divisible par 3.

Solution : appelons n le plus petit de ces trois nombres. La somme vaut ainsi $S = n + (n + 1) + (n + 2) = 3n + 3$, qui divisée par trois donne $n + 1$, quotient entier. Donc S est divisible par trois. Ceci étant valable pour tout nombre entier n, on a démontré le résultat souhaité. $\square$

Pour les chercheurs en herbe

N'hésite pas à venir me demander une fiche défi sur le calcul littéral.