

Arithmétique

Webmestre@Seine-et-maths

2024-2025

En classe, nous avons évoqué le mathématicien de l'Antiquité Eratosthène.

Tout au long de cette leçon, nous nous limiterons aux nombres positifs.

1 Diviseurs et multiples

Définition 1 Soient a un nombre entier et b un nombre entier non nul. Lorsque le reste de la division euclidienne de a par b est nul, il existe un nombre entier k tel que $a = b \times k$. On dit alors que a est un **multiple** de b , ou que b est un **diviseur** de a , ou encore que b **divise** a ou enfin que a est **divisible** par b .

Exemple : $168 = 42 \times 4$ donc 168 est un multiple de 42 (et de 4), ou 42 et 4 sont des diviseurs de 168, ou encore 168 est divisible par 42 (et par 4), ou encore 42 et 4 divisent 168.

Propriété 1 (Critère de divisibilité par 2) Un nombre est divisible par 2 si et seulement si son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8.

Vérification : d'une part, si un nombre N a pour chiffre des unités 0, 2, 4, 6 ou 8, on peut l'écrire comme le résultat d'une somme $n + p$ où n est un multiple de 10 (donc de 2) et p un chiffre pair, c'est-à-dire un multiple de 2 (par exemple, $126 = 120 + 6 = n + p$ avec $n = 120$ et $p = 6$). Or la somme de deux multiples d'un nombre est un multiple de ce nombre. Ainsi N est un multiple de 2 ;

Réciproquement, si un nombre N est un multiple de 2, alors il existe un nombre entier k tel que $N = 2k$, ce qui implique que son chiffre des unités est pair.

Propriété 2 (Autres critères de divisibilité) \diamond un nombre est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est un multiple de 3 ;
 \diamond un nombre est divisible par 4 si ses deux derniers chiffres forment un multiple de 4 ;
 \diamond un nombre est divisible par 5 s'il se termine par 0 ou 5 ;
 \diamond un nombre est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est un multiple de 9.

Questions ouvertes (ne pas écrire) :

- \diamond qu'en est-il d'éventuels critères de divisibilité par 6, 7 ou 8 ?
- \diamond y a-t-il équivalence entre être divisible par ab et être divisible à la fois par a et par b ?

Définition 2 \heartsuit Un **nombre premier** est un nombre entier qui a pour seuls diviseurs 1 et lui-même.

Exemples : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 et 29 sont les nombres premiers inférieurs ou égaux à 30.

2 Décomposition en facteurs premiers

On admet que tout nombre entier peut s'écrire de façon unique comme un produit de nombres premiers.

On appelle cette écriture la **décomposition en facteurs premiers** de ce nombre.

Méthode 1 Pour trouver la décomposition en facteurs premiers d'un nombre, on commence par vérifier s'il est divisible par 2, puis par 3, puis par 5, et ainsi de suite en testant les nombres premiers.

Exemple : nous allons essayer de décomposer le nombre 420 en produit de facteurs premiers. On commence par diviser par 2 : on obtient 210.

Donc $420 = 2 \times 210$. Puis on divise 210 par 2 : on obtient 105.

Donc $420 = 2 \times 2 \times 105$. 105 n'est clairement pas divisible par 2 (pourquoi ?), mais il l'est par 3 (pourquoi ?), donc on divise par 3 : on obtient 35.

Ainsi, $420 = 2 \times 2 \times 3 \times 35$. 35 n'est clairement pas divisible par 3 (pourquoi ?), mais il l'est par 5 (pourquoi ?), donc on divise par 5 : on obtient 7.

Finalement, la décomposition en facteurs premiers recherchée est $420 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7$.

On écrit aussi : $420 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7$.

Exercice : en déduire la décomposition en facteurs premiers des nombres suivants : 2100, 56, 880.

Méthode 2 Pour trouver le plus grand diviseur commun (PGCD) entre deux nombres, on les décompose en facteurs premiers, puis on ne conserve que les facteurs communs aux deux décompositions et on les multiplie.

Exemple : essayons pour 385 et 210 [...]

3 Fractions irréductibles

Définition 3 ♡ Deux nombres **premiers entre eux** sont deux nombres entiers qui ont pour seul diviseur commun 1.

Exemple : 45 et 28 sont premiers entre eux.

Définition 4 Une **fraction irréductible** est une fraction qu'on ne peut pas simplifier.

Propriété 3 Si le numérateur et le dénominateur d'une fraction sont premiers entre eux, alors cette fraction est irréductible.

Corollaire (conséquence) 1 Lorsqu'on simplifie une fraction par le PGCD de son numérateur et de son dénominateur, on obtient une fraction irréductible.

Exemple : 385 et 210 ont pour plus grand diviseur commun 35 donc $\frac{385}{210} = \frac{385 \div 35}{210 \div 35} = \frac{11}{6}$.

4 Plus petit multiple commun

Méthode 3 Pour trouver le plus petit multiple commun (PPCM) entre deux nombres, on les décompose en facteurs premiers, puis on conserve tous les facteurs présents dans l'une ou l'autre des décompositions et on les multiplie.

Exemple : deux ampoules clignotent. L'une s'allume toutes les 153 secondes et l'autre toutes les 187 secondes. A minuit, elles s'allument ensemble. Déterminons l'heure à laquelle elles s'allumeront de nouveau ensemble. [...]

Pour les chercheurs en herbe

Conjecture de Goldbach (1742)

Tout nombre entier pair supérieur à 3 peut s'écrire comme la somme de deux nombres premiers.

Un défi à relever !

Un **nombre parfait** est un nombre égal à la moitié de la somme de tous ses diviseurs. Autrement dit, il est égal à la somme de ses diviseurs stricts (tous ses diviseurs sauf lui-même). Essaie de trouver quatre nombres parfaits.